

УДК 517.958

На правах рукописи

Селиванов Константин Михайлович

**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ
ТВЕРДОГО ТЕЛА КАНОНИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск - 2010

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет».

- Научный руководитель** доктор технических наук, профессор
Ефимов Игорь Николаевич
- Официальные оппоненты** доктор физико-математических наук, профессор
Вахрушев Александр Васильевич
(г. Ижевск)
- кандидат физико-математических наук, доцент
Шумкова Дарья Борисовна
(г. Пермь)
- Ведущая организация** ГОУ ВПО «Уфимский государственный
авиационный технический университет»
(г. Уфа)

Защита диссертации состоится «24» декабря 2010 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.065.07 при ГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет» по адресу: 426069, Ижевск, ул. 30 лет Победы, д. 2, корпус 5, ауд. 504.

Отзывы на автореферат, заверенные гербовой печатью, просим направлять по адресу: 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7, ФГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет», ученому секретарю диссертационных советов. E-mail: dissovet@istu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет» по адресу: 426069, г.Ижевск, ул. Студенческая, 7, к.1. С авторефератом можно ознакомиться на официальном сайте ГОУ ВПО ИжГТУ: www.istu.ru.

Автореферат разослан « 23 » ноября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор



К.В. Кетова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Уравнения движения твердого тела в механике допускают различные формы записи. Для аналитических исследований чаще других используется известная система уравнений Эйлера, имеющая симметричный вид записи и форму, аналогичную уравнениям Ньютона. Применяемый в аналитической динамике метод Лагранжа менее удобен вследствие не инвариантности функции Лагранжа относительно выбора координат, задающих ориентацию твердого тела. Преобразования Лежандра, осуществляемые при переходе к координатно-импульсному представлению фазового пространства для функции Гамильтона, также приводят к усложнению формы записи уравнений движения. Поэтому в динамике твердого тела применение гамильтонова формализма ограничено исследованием общих свойств системы в частности, наличием у нее интегралов движения и циклических координат. Фундаментальные результаты при разработке теоретических основ классической механики принадлежат Л. Эйлеру, Ж.Л. Лагранжу, М.В. Остроградскому, У. Гамильтону, К. Якоби, А.М. Ляпунову, С.В. Ковалевской, А.Н. Колмогорову, В.И. Арнольду, Ю. Мозеру.

При численном интегрировании уравнений движения твердого тела ситуация принципиально меняется. Прежде всего, алгоритмы, полученные при использовании всех трех перечисленных методов, оказываются одинаково неинвариантными по отношению к выбору обобщенных координат и одинаковыми по сложности. Однако при этом оказывается, что только в рамках гамильтонова формализма возможно использование канонического метода интегрирования, в основе которого лежат канонические преобразования фазового пространства.

Предметом исследования являются математические модели динамики твердого тела и численные методы интегрирования уравнений движения, применительно к транспортным, авиационным, космическим системам.

При конструировании, создании и последующей эксплуатации летательных аппаратов одним из важнейших вопросов является исследование условий устойчивости их движения, обеспечивающих безопасные режимы полета. Особо опасной является ситуация, при которой колебательное движение одной из степеней свободы, например, относительно оси тангажа, переходит во вращательное движение другой степени свободы, например, относительно оси курса (плоский штопор). Натурное воспроизведение таких режимов связано с большим риском для экипажа и самого летательного аппарата. Моделирование в аэродинамических трубах сопряжено с большими затратами и, как правило, возможно лишь после создания опытного образца. В этой связи альтернативой или направлением снижения рисков и затрат является построение адекватных объектно-ориентированных компьютерных моделей динамики летательного аппарата и компьютерный эксперимент, позволяющий проанализировать устойчивость его движения.

Целью работы является построение математических моделей динамики твердого тела с использованием канонического метода интегрирования применительно к описанию поведения летательного аппарата.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи.

1. Построение математической модели динамики твердого тела на основе гамильтонова формализма.
2. Построение канонических алгоритмов для исследования устойчивости движения твердого тела.
3. Сравнение разработанных алгоритмов с существующими.
4. Разработка программного комплекса для исследования динамической устойчивости летательного аппарата.
5. Проведение исследования динамической устойчивости летательного аппарата.

Теоретические и методологические основы исследования.

Исследования проведены с использованием теории канонического метода интегрирования динамических уравнений Гамильтона. В основе указанного метода лежит принцип консервативных возмущений. Согласно этому принципу все вычислительные процессы численного интегрирования уравнений движения должны соответствовать малому консервативному возмущению. Такой подход приводит к значительному повышению достоверности и информативности результатов компьютерного эксперимента.

Согласно результатам канонической теории возмущений (теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера) малые консервативные возмущения не могут нарушать устойчивость консервативной системы при ее движении вблизи положения равновесия. С другой стороны, неустойчивость консервативно возмущенной системы, воспроизводимая в процессе компьютерного эксперимента, всегда определяет неустойчивость исходной системы, поскольку означает попадание решения для фазовой траектории в окрестность сепаратрисы. Таким образом, имеется реальная возможность использования результатов указанной теории в исследовании динамики твердого тела, в частности, для условий устойчивости летательных аппаратов.

Достоверность и обоснованность полученных результатов подтверждаются проведенными исследованиями сходимости численных методов, проверкой разработанных методик на решении тестовых задач и сравнением результатов расчетов с результатами, полученными другими авторами.

На защиту выносятся.

1. Математическая модель динамики твердого тела, построенная с использованием гамильтонова формализма в условиях свободного вращения, в потенциальном поле и под действием диссипативных сил.
2. Устойчивые алгоритмы интегрирования уравнений динамики твердого тела.
3. Сравнение результатов полученных каноническим методом и методом Эйлера.

4. Программный комплекс моделирования динамики твердого тела и результаты анализа компьютерных моделей поведения летательного аппарата.
5. Исследование поведения летательного аппарата в условиях свободного вращения, в потенциальном поле, под действием диссипативных сил.

Научная новизна работы.

1. Впервые получены математические модели движения твердого тела под действием консервативных и диссипативных сил.
2. Впервые получены устойчивые к накоплению погрешности алгоритмы численного интегрирования уравнений движения твердого тела в условиях свободного вращения, под действием обобщенных сил и моментов.
3. Впервые получена численная реализация канонического метода интегрирования уравнений динамики твердого тела.
4. Впервые разработан программный комплекс моделирования и исследования динамической устойчивости летательного аппарата.
5. Впервые с помощью программного комплекса даны сравнительные характеристики устойчивости движения твердого тела с использованием алгоритмов метода Эйлера и канонического метода.

Практическая значимость и реализация результатов исследования.

Программный комплекс, использующий канонический метод интегрирования, обеспечивает повышение точности и производительности компьютерного эксперимента.

Полученные алгоритмы и методики, реализованные в программном комплексе, могут быть использованы при проектировании транспортных, авиационных и космических систем.

Результаты работы внедрены в Чайковском технологическом институте (филиал) ГОУ ВПО Ижевский государственный технический университет. Акт внедрения (использования) результатов работы прилагается.

Программный комплекс был использован в учебной программе в спецкурсе «Компьютерное моделирование физических процессов» для специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления», в курсе «Методология научного творчества» для магистрантов, а также при преподавании разделов «Механика» в курсе физики.

Положительные результаты использования канонического метода численного интегрирования для исследования рассмотренных динамических моделей, позволяют утверждать перспективность его дальнейшего внедрения в различные области эволюционной динамики.

Работа проводилась по заданию Федерального агентства по образованию в рамках Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» по теме 0120.0 805060 «Исследование динамической устойчивости летательных аппаратов (ЛА)» (2008 – 2009 гг.).

В настоящее время продолжаются исследования в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 года (ГК № 02.740.11.0658 от 29 марта 2010 г) по теме

“Разработка модели автоматизированной системы интеграции открытых виртуальных лабораторных комплексов”.

Разработаны программные комплексы “Моделирование и исследование динамической устойчивости летательного аппарата” (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010611155) и “Моделирование и оценка вертикальных вибронагрузений транспортного средства” (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615497).

Научная апробация результатов исследования.

Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: Выставке – сессии инновационных проектов ИжГТУ, (Ижевск, 2008 г.), Научно – практических конференциях Чайковского технического института (филиал) ИжГТУ (Чайковский, 2008-2010 гг.), XII Международной научно – практической конференции “Фундаментальные и прикладные проблемы приборостроения, информатики и экономики” в МГУПИ (Москва, 2009 г.), VI Всероссийской научно – технической конференции “Информационные системы и модели в научных исследованиях промышленности и экологии” (Тула, 2010 г.).

Публикации.

Результаты работы отражены в 9 научных публикациях: 7 статей в научных журналах, в том числе 2 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертации, 2 зарегистрированные программы для ЭВМ.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка и двух приложений. Работа изложена на 130 страницах машинописного текста, содержит 42 рисунка, 13 таблиц и список литературы из 126 наименований. В приложениях представлен акт о использовании результатов работы и свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность исследования, определена цель работы, сформулирована научная и практическая значимость, научная новизна и основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе проведен анализ литературных источников, касающихся вопросов описания и исследования динамики твердого тела, методов интегрирования уравнений динамики.

В диссертационной работе использованы методы аналитической динамики.

Запишем исходную систему уравнений Гамильтона для невозмущенного движения твердого тела:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q}, \\ \frac{d}{dt} q = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}, \end{cases} \quad (1)$$

где $H(p, q)$ - функция Гамильтона, p, q - обобщенные импульсы и координаты.

Связь между исходной и консервативно возмущенной системой осуществляется бесконечно малыми каноническими преобразованиями. Из теории канонического интегрирования этому должны соответствовать алгоритмы численного интегрирования, обеспечивающие консервативность возмущения, вызванного процессом счёта. В данной работе используются алгоритмы следующего вида:

импульс – координата:

$$p^{(i+1)} = p^i - \tau \frac{\partial H(p^i, q^i)}{\partial q^i}, \quad (2)$$

$$q^{(i+1)} = q^i + \tau \frac{\partial H(p^{(i+1)}, q^i)}{\partial p^{(i+1)}},$$

координата – импульс:

$$q^{(i+1)} = q^i + \tau \frac{\partial H(p^i, q^i)}{\partial p^i}, \quad (3)$$

$$p^{(i+1)} = p^i - \tau \frac{\partial H(p^i, q^{(i+1)})}{\partial q^{(i+1)}},$$

где τ - шаг интегрирования.

Основные свойства указанных алгоритмов.

Свойство 1. Преобразования фазового пространства, осуществляемые алгоритмами (2), (3) есть бесконечно малые преобразования по параметру шага интегрирования.

Свойство 2. Влияние процесса счёта проявляется в форме малого консервативного возмущения исходной системы.

Свойство 3. Предлагаемые алгоритмы устойчивы к накоплению погрешности счёта.

Свойство 4. Алгоритмы интегрирования уравнений Гамильтона (2), (3) выполняют наименьшее количество арифметических операций по сравнению с другими алгоритмами (за исключением метода Эйлера).

На основе использования алгоритмов (2), (3) могут быть построены компьютерные модели, воспроизводящие движение твердого тела в условиях свободного вращения, под действием консервативных и диссипативных сил.

Во второй главе рассмотрены вопросы кинематики, динамики и устойчивости движения твердого тела на основе использования гамильтонова формализма.

Конфигурация твёрдого тела определяется тремя декартовыми координатами центра масс и тремя углами, фиксирующими ориентацию относительно неподвижной системы отсчёта, а движение центра инерции соответствует движению материальной точки.

Рассмотрены следующие модели движения твердого тела: свободное вращение, движение в потенциальном поле, движение в потенциальном поле

под действием диссипативных сил, которые могут исследоваться отдельно, либо в различных комплексах.

Представим физическую модель объекта как движение свободного твердого тела с одной неподвижной точкой, относительно неподвижной системы координат $OX_1X_2X_3$, а в качестве углов (φ, θ, ψ) выберем навигационные углы поворота относительно оси крена, тангажа и курса (рисунок 1).

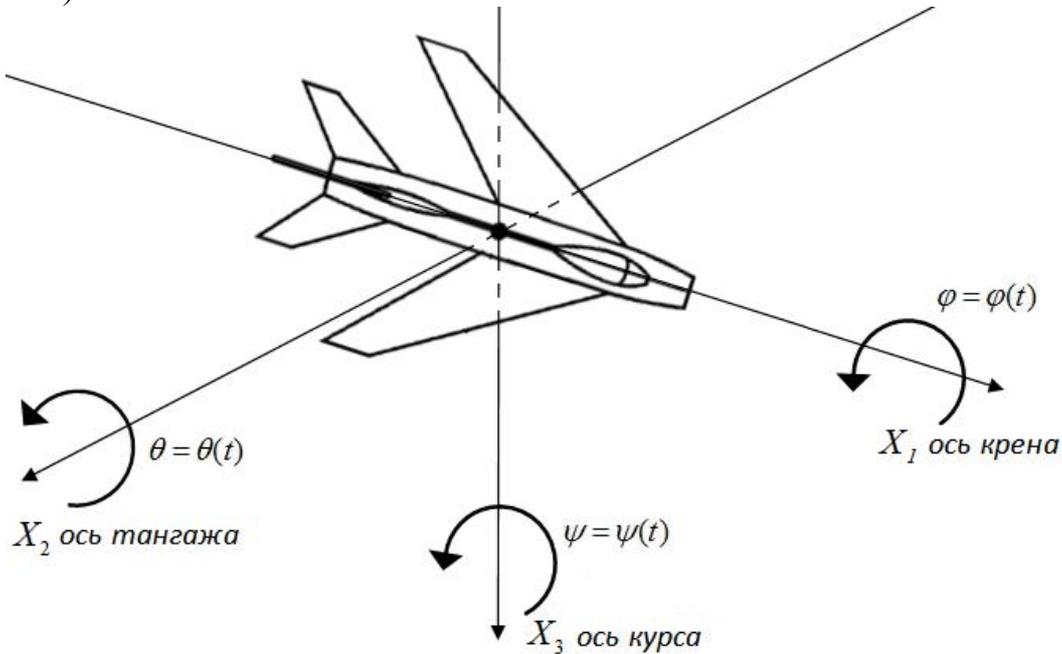


Рисунок 1 – Навигационные углы вращения летательного аппарата

Преобразования оператора A соответствуют положению твердого тела, совершившего последовательный поворот на угол крена φ , угол тангажа θ и угол курса ψ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot \cos \psi & -\cos \theta \cdot \sin \psi & \sin \theta \\ \cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi & \sin \varphi \cdot \sin \psi - \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi & -\sin \varphi \cdot \cos \theta \\ \sin \varphi \cdot \sin \psi - \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi & \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi & \cos \varphi \cdot \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

Для записи кинематических формул летательного аппарата необходимо определить проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат $OY_1Y_2Y_3$, выразив их через углы поворота φ, θ, ψ и их производные $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$.

Получим выражение проекций угловых скоростей твердого тела $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ на оси подвижной системы координат:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \cos \theta \cdot \cos \psi \cdot \dot{\varphi} + \sin \psi \cdot \dot{\theta}, \\ \Omega_2 &= -\cos \theta \cdot \sin \psi \cdot \dot{\varphi} + \cos \psi \cdot \dot{\theta}, \\ \Omega_3 &= \sin \theta \cdot \dot{\varphi} + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку главные моменты инерции твердого тела отнесены к осям системы $OY_1Y_2Y_3$, то кинетическая энергия вращения выразится квадратичной формой вида:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (J_1 \cdot \Omega_1^2 + J_2 \cdot \Omega_2^2 + J_3 \cdot \Omega_3^2), \quad (6)$$

где J_1, J_2, J_3 - главные моменты инерции.

Схема построения функции Гамильтона H , заключается в преобразовании производных функции навигационных углов в обобщенные импульсы:

$$T(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \longrightarrow T(\varphi, \theta, \psi, p_\varphi, p_\theta, p_\psi) \longrightarrow H, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} p_\varphi &= p_\varphi(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}), \\ p_\psi &= p_\psi(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}), \\ p_\theta &= p_\theta(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}). \end{aligned} \quad (8)$$

Функция Гамильтона H для случая свободного движения (вращения) твердого тела совпадает с кинетической энергией T :

$$H = T = \sum_{i=1}^3 T_{ij} \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (9)$$

где T_{ij} - коэффициент квадратичной формы кинетической энергии T ,
 \dot{q}_i - обобщенные координаты (навигационные углы).

Используя выражения для преобразования координат, запишем кинетическую энергию твердого тела в случае свободного вращения:

$$T = T_{11} \cdot \dot{\varphi}^2 + T_{12} \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} + T_{22} \cdot \dot{\theta}^2 + T_{13} \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} + T_{33} \cdot \dot{\psi}^2, \quad (10)$$

где значения коэффициентов квадратичной формы имеют вид:

$$\begin{aligned} T_{11} &= 0.5 \cdot (J_1 \cdot \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \psi + J_2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \psi + J_3 \cdot \sin^2 \theta), \\ T_{12} &= (J_1 - J_2) \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi, \\ T_{22} &= 0.5 \cdot (J_1 \cdot \sin^2 \psi + J_2 \cdot \cos^2 \psi), \\ T_{13} &= J_3 \cdot \sin \theta, \\ T_{33} &= 0.5 \cdot J_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Определим из (9) проекции кинетического момента (обобщенные импульсы) через производные функций углов поворота $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$:

$$\begin{cases} p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = T_{11} \cdot \dot{\varphi} + T_{12} \cdot \dot{\theta} + T_{13} \cdot \dot{\psi}, \\ p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = T_{12} \cdot \dot{\varphi} + T_{22} \cdot \dot{\theta} + 0 \cdot \dot{\psi}, \\ p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = T_{13} \cdot \dot{\varphi} + 0 \cdot \dot{\theta} + T_{33} \cdot \dot{\psi}. \end{cases} \quad (12)$$

Разрешим систему (12), используя формулу Крамера, получим:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{1}{\Delta} (M_{11} \cdot p_{\varphi} + M_{21} \cdot p_{\theta} + M_{31} \cdot p_{\psi}) = \frac{\Delta_{\varphi}}{\Delta}, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{\Delta} (M_{12} \cdot p_{\varphi} + M_{22} \cdot p_{\theta} + M_{23} \cdot p_{\psi}) = \frac{\Delta_{\theta}}{\Delta}, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\Delta} (M_{13} \cdot p_{\varphi} + M_{32} \cdot p_{\theta} + M_{33} \cdot p_{\psi}) = \frac{\Delta_{\psi}}{\Delta},\end{aligned}\quad (13)$$

где $\Delta, \Delta_{\varphi}, \Delta_{\theta}, \Delta_{\psi}$ - определители системы (12), $M_{ij} = 1, 2, 3$ – алгебраические дополнения.

В соответствии со схемой (7), подставляя выражения производных функций углов поворота (13) в функцию кинетической энергии (10), получим функцию Гамильтона H для случая свободного вращения:

$$H = \frac{1}{\Delta^2} \cdot (T_{11} \cdot \Delta_{\varphi}^2 + T_{12} \cdot \Delta_{\varphi} \cdot \Delta_{\theta} + T_{22} \cdot \Delta_{\theta}^2 + T_{13} \cdot \Delta_{\varphi} \cdot \Delta_{\psi} + T_{33} \cdot \Delta_{\psi}^2). \quad (14)$$

В динамические уравнения Гамильтона входят частные производные функций Гамильтона H по импульсам и координатам и представляют собой достаточно громоздкие выражения, поэтому предварительно следует определить соответствующие частные производные всех промежуточных выражений. При создании и тестировании компьютерных программ эти промежуточные выражения удобно представить как упорядоченную систему функций (банк функций) в табличном виде. Схема формирования системы функций и алгоритма представлена на рисунке 2.

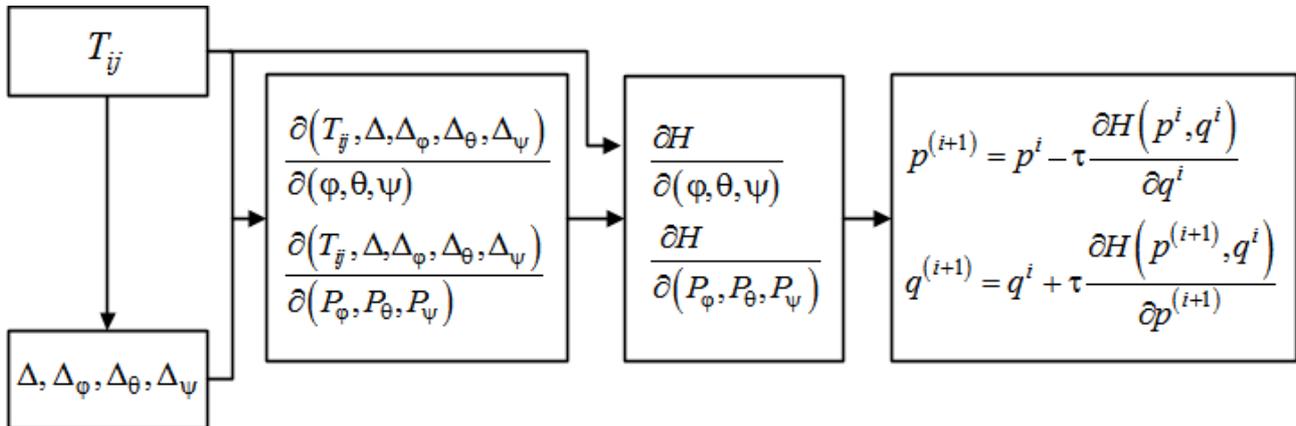


Рисунок 2 – Схема формирования системы функций и алгоритма

Движение объекта в отсутствие действия сил диссипации (полной и неполной) выразится в форме консервативной системы (1). При численном интегрировании фазовые траектории возмущенных движений будут иметь вид:

$$\begin{aligned}P &= p + \delta P, \\ Q &= q + \delta Q.\end{aligned}\quad (15)$$

Будем считать функции p, q и $\delta P, \delta Q$ одного класса дифференцируемости, тогда можно утверждать, что фазовым траекториям (рисунок 3) соответствует собственная система динамических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P = -\frac{\partial H(P, Q, \tau)}{\partial Q}, \\ \frac{d}{dt} Q = \frac{\partial H(P, Q, \tau)}{\partial P}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} H(P, Q, \tau) = H(p, q). \quad (17)$$

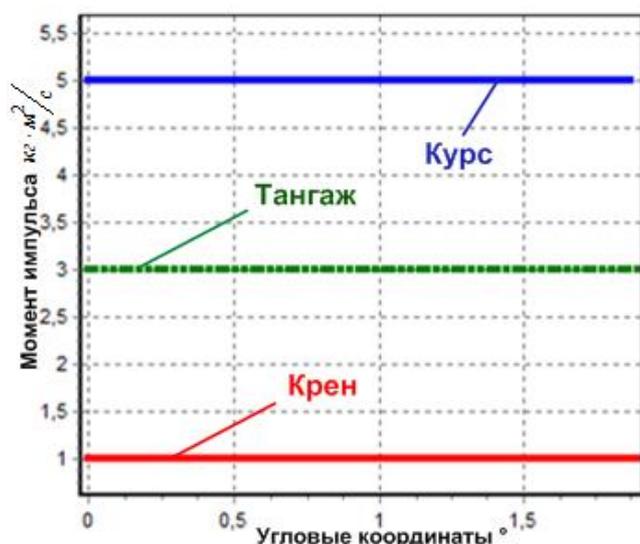


Рисунок 3 – Фазовые траектории свободного движения

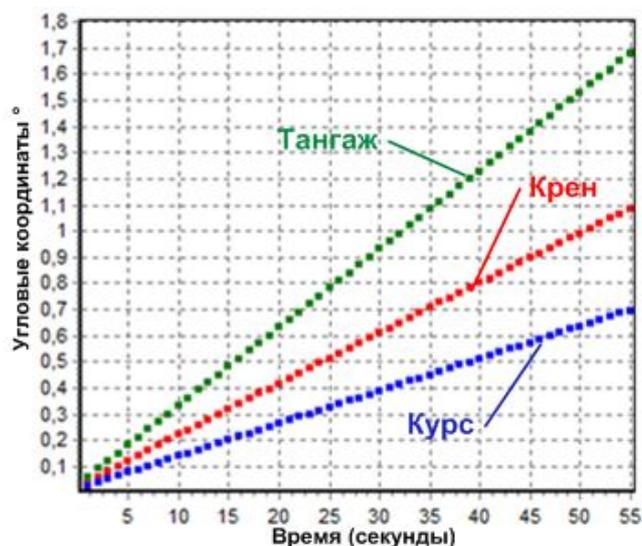


Рисунок 4 – Зависимость угловых координат φ, θ, ψ от времени

Принимаем следующие утверждения.

1. Воспроизводимое компьютером движение (рисунок 4) соответствует движению исходной системы в условиях действия бесконечно малых консервативных возмущений.

2. Консервативные возмущения, вызванные процессом счета, не нарушают исходную устойчивость движения, т.е. движения в окрестности большой и малой оси инерции.

3. Неустойчивость воспроизводимого компьютером движения означает движение в области неустойчивости твёрдого тела, т.е. в окрестности средней оси инерции.

Запишем уравнения движения твердого тела в форме системы уравнений Гамильтона с учетом диссипативных членов:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q} - D_1(\dot{q}) - D_2(q, \dot{q}), \\ \frac{d}{dt} q = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}, \end{cases} \quad (18)$$

где $p = (p_\varphi, p_\theta, p_\psi)$, $q = (\varphi, \theta, \varphi)$, $\dot{q} = (\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ – соответственно угловые импульсы, навигационные углы и их производные, D_1, D_2 – диссипативные моменты с полной и неполной диссипацией энергии.

Кроме рассмотренных, явно задаваемых сил, обеспечивающих режим движения, на объект действуют силы малой интенсивности самой различной природы. Указанные силы приводят к изменению его фазовых траекторий. Требование малости отклонения фазовой траектории, при условии малости действующих возмущающих сил, очевидно, составляет необходимое условие устойчивости режима движения (рисунок 5).

Под устойчивым режимом движения будем понимать способность объекта сколь угодно долго оставаться в фиксированной окрестности невозмущённой фазовой траектории при действии на него малых возмущающих факторов (устойчивость по Лагранжу).

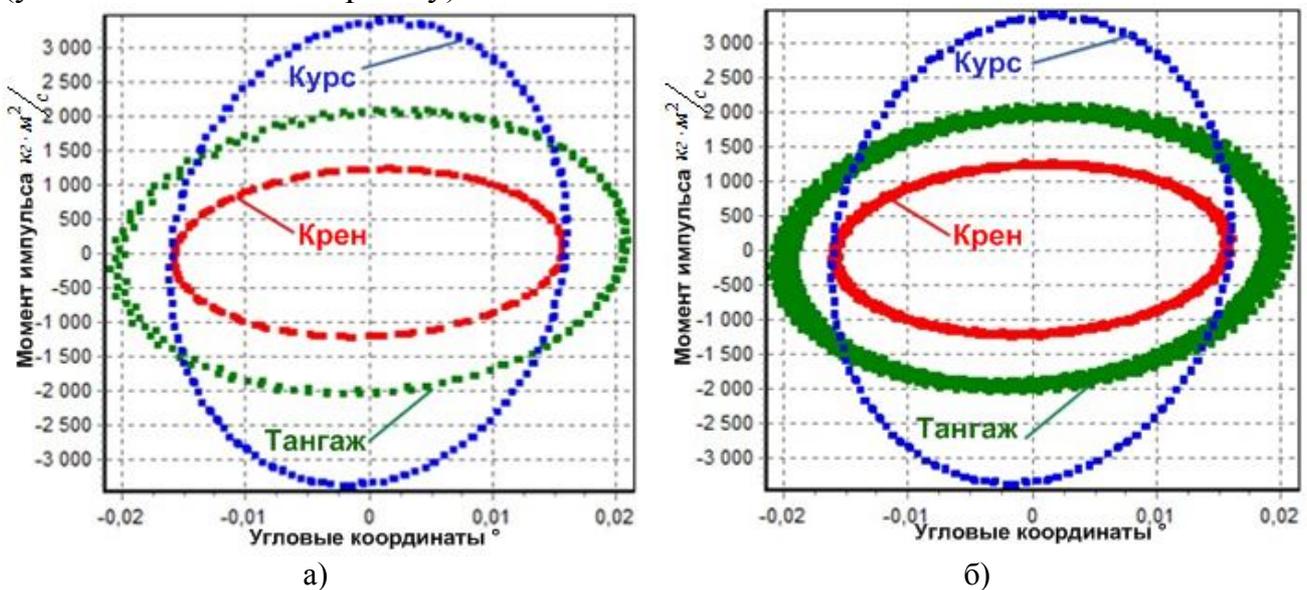


Рисунок 5 - Фазовые траектории движения твердого тела относительно осей координат в потенциальном поле в моменты времени а) $t = 100$ сек., б) $t = 2000$ сек.

Сохранение гамильтоновой формы преобразования $p \xrightarrow{\tau} P$, $q \xrightarrow{\tau} Q$ позволяет представить гамильтониан возмущённой системы (16) в форме канонических рядов вида:

$$\begin{aligned} H_I(p, Q, \tau) &= H_0(p, Q) + H_1(p, Q) \cdot \tau + \dots \\ H_{II}(P, q, \tau) &= H_0(P, q) + H_1(P, q) \cdot \tau + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Сходимость рядов (19) обеспечивает выполнение условия устойчивости движения к малым консервативным возмущениям, поскольку означает сколь угодно долгое нахождение фазовой траектории в окрестности невозмущённого движения. Ряды (19) заведомо могут расходиться при попадании фазовой точки в малую окрестность сепаратрис, что соответствует нахождению твердого тела вблизи нейтрального положения между состоянием колебаний и вращений. Все другие случаи расходимости при разумных предположениях о величине параметра имеют исключительный характер и представляют лишь

теоретический интерес, поскольку скорость ухода возмущённой траектории оказывается пренебрежимо малой по отношению ко времени движения. Такие выводы соответствуют реальной картине – постоянно действующие на объект малые возмущения различной природы не нарушают режимов движения, если он не оказывается вблизи критических режимов.

Следовательно, малые консервативные возмущения не нарушают устойчивость режима движения твёрдого тела, а нарушение устойчивости является достаточным условием критических режимов движения и перехода колебания во вращение.

Проанализируем вопрос о влиянии диссипативных возмущений на устойчивость движения.

Для бесконечно малых по параметру τ возмущений динамические уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P = -\frac{\partial H(P, Q, \tau)}{\partial Q} - D_1(\dot{Q}, \tau) - D_2(Q, \dot{Q}, \tau), \\ \frac{d}{dt}Q = \frac{\partial H(P, Q, \tau)}{\partial P}. \end{cases} \quad (20)$$

Как и в случае консервативной системы, будем полагать степень малости возмущений выше первого порядка. Рассмотрим бесконечно малые возмущения для случая с полной диссипацией энергии (возмущения, связанные с вязким трением):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P = -\frac{\partial H(P, Q, \tau)}{\partial Q} + D(\dot{Q}, \tau), \\ \frac{d}{dt}Q = \frac{\partial H(P, Q, \tau)}{\partial P}, \end{cases} \quad (21)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} D(\dot{Q}, \tau) = D_1(\dot{Q}). \quad (22)$$

Диссипативную часть преобразования можно рассматривать как некоторое малое по порядку шага монотонное возмущение диссипативной функции вида $D(\dot{Q} + \delta\dot{q}(\tau^2))$, которое увеличивает или уменьшает имеющуюся диссипацию энергии. На рисунке 6 изображены фазовые траектории при действии консервативных и диссипативных сил. На рисунке 6а представлен полный фазовый портрет, отдельно каждые фазовые траектории приведены на рисунках 5б, 5в, 5г.

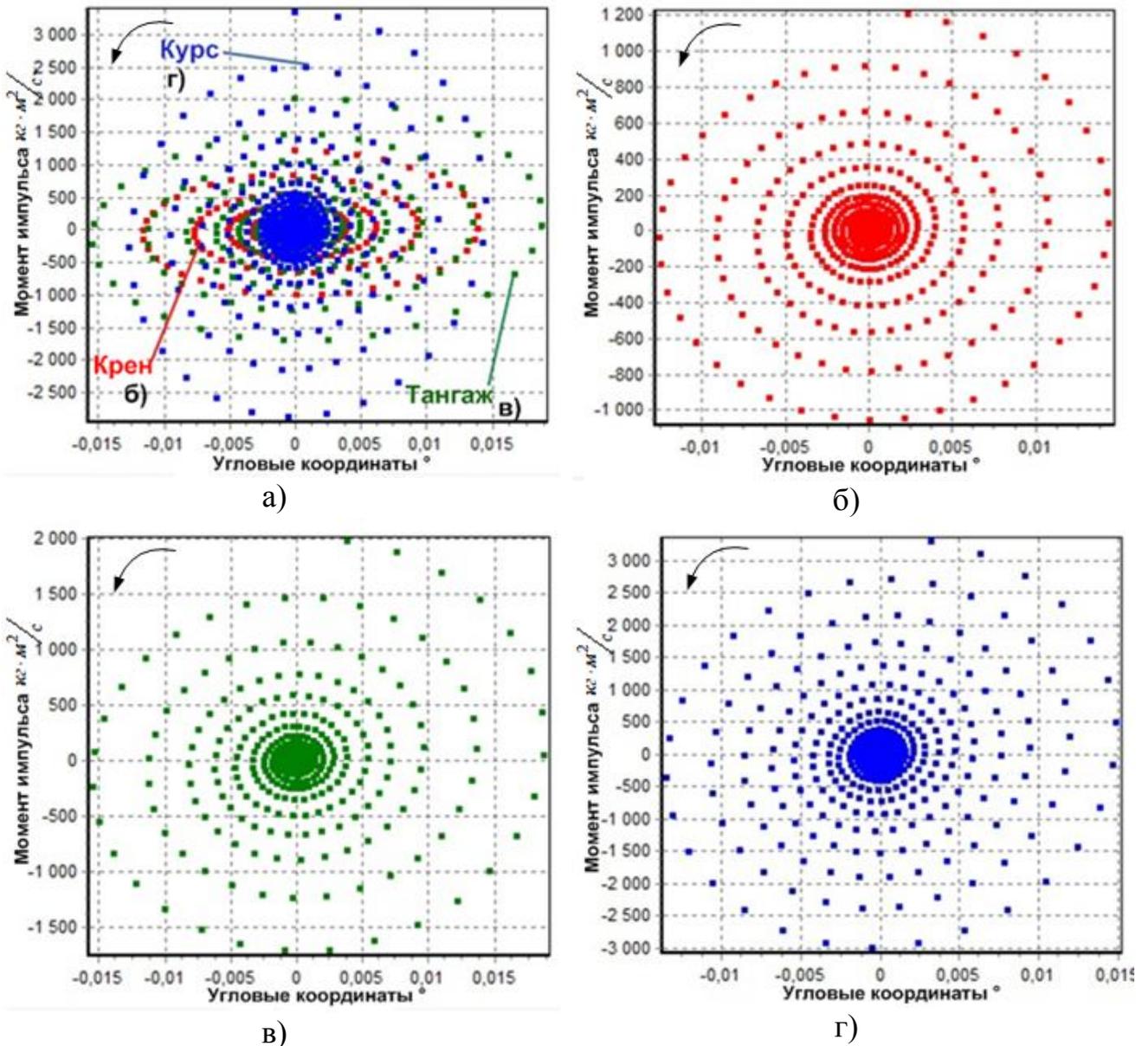


Рисунок 6 - Фазовые траектории вращения относительно осей координат под действием консервативных и диссипативных сил
 а) крен, тангаж и курс, б) крен, в) тангаж; г) курс

В соответствие с теоремой Лагранжа, наличие диссипативных сил в устойчивой системе делает её асимптотически устойчивой. В интересующем нас случае, устойчивости по Лагранжу, означает, что бесконечно малые диссипативные возмущения проявляются в увеличении или уменьшении стабилизирующего фактора действующих диссипативных сил в форме экспоненты порядка $o(\tau^2)$.

Таким образом, можно сделать следующие обобщения.

1. Консервативные возмущения, вызванные процессом счета, не нарушают исходную устойчивость движения твердого тела, т.е. движения в окрестности большой и малой оси инерции и в окрестности точки минимума потенциала.

2. Неустойчивость воспроизводимого компьютером движения твердого тела означает его попадание в области неустойчивости, т.е. либо в окрестности средней оси инерции, либо в окрестности точки максимума потенциала.

3. Диссипативное возмущение, вызванное процессом интегрирования, не может стабилизировать исходную неустойчивость системы.

Исследуем погрешность метода канонического интегрирования, анализируя изменение функции Гамильтона H (10), составляющих квадратичной формы (11) (рисунок 7) и относительной погрешности изменения функции Гамильтона H (рисунок 8).

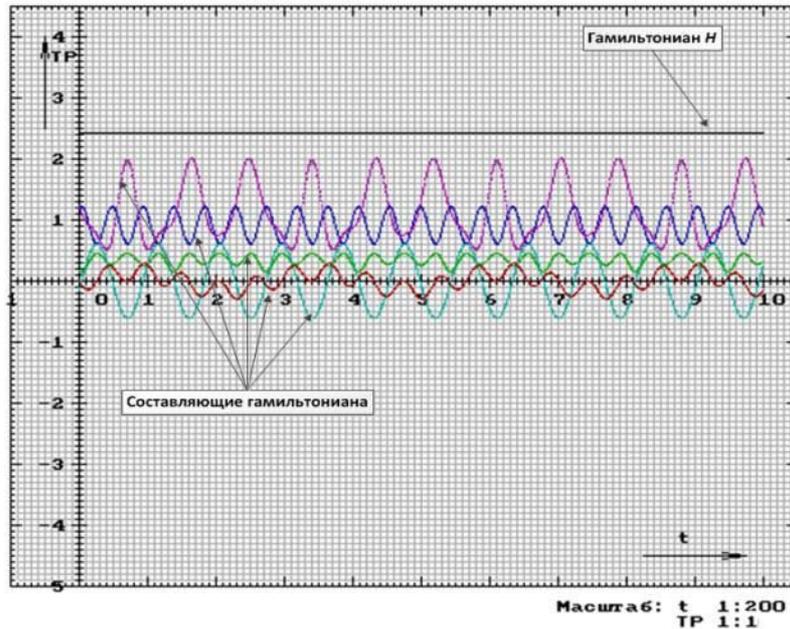


Рисунок 7 – Изменение функции Гамильтона и членов квадратичной формы во времени

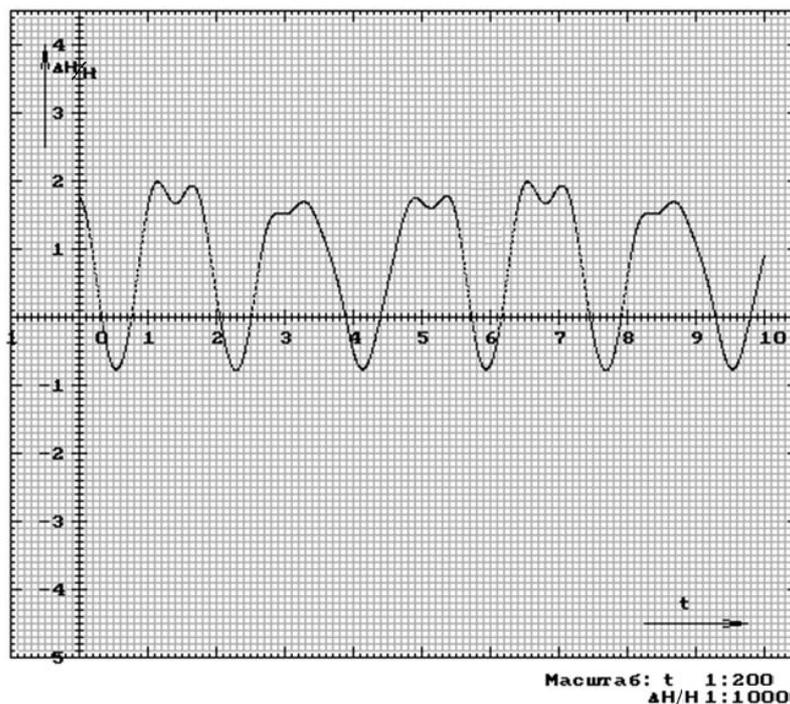


Рисунок 8 – Относительная погрешность изменений гамильтониана по времени

По определению, данный график (рисунок 8) показывает влияние малого консервативного возмущения. Малое консервативное возмущение не нарушает устойчивость процесса счета, что и подтверждается малыми изменениями функции Гамильтона. Амплитуда изменения функции Гамильтона при шаге $\tau = 0.01$ остается постоянной в течение всего времени интегрирования, при относительной погрешности $\max \frac{\Delta H}{H} = 0,0002$.

В третьей главе рассмотрены алгоритмы численной реализации системы Гамильтона, построенные с использованием канонического метода интегрирования.

Основные требования к компьютерным моделям динамики заключаются в следующем.

1. Все выполняемые операции в процессе интегрирования уравнений движения необходимо рассматривать как возможные возмущения.
2. Возмущения, вызванные процессом счета, должны быть выше первого порядка малости.
3. Характер возмущения должен соответствовать характеру моделируемого воздействия (рисунок 9).

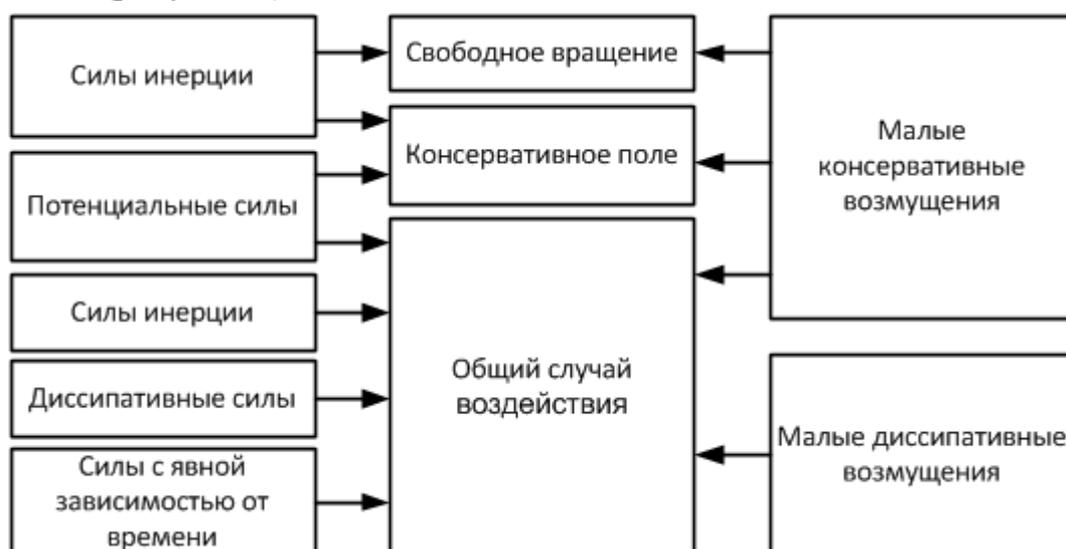


Рисунок 9 – Возмущения, вызванные процессом численного интегрирования

Модель свободного вращения в условиях действия потенциальных сил является консервативной системой. Таким образом, процесс численного интегрирования должен соответствовать малому консервативному возмущению. Функциональная схема компьютерной модели при численном интегрировании консервативной системы приведена на рисунке 10.

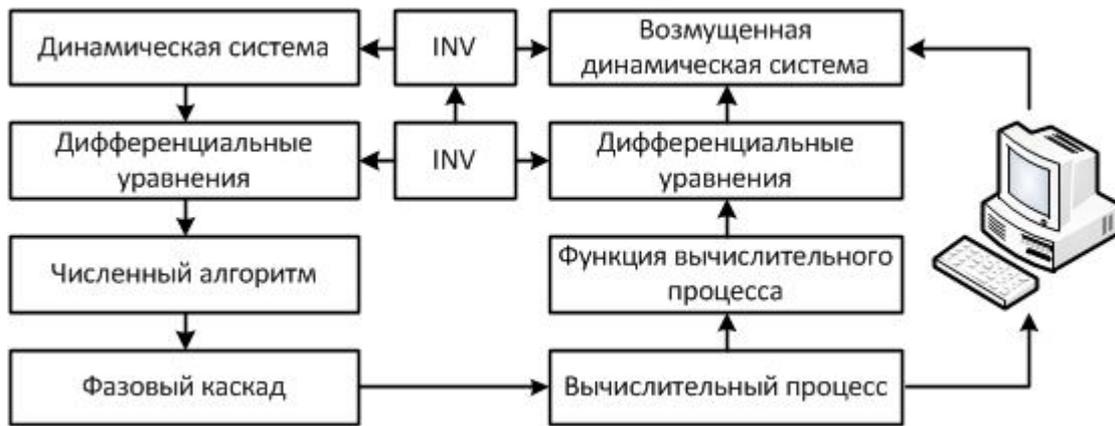


Рисунок 10 – Функциональная схема построения процесса численного интегрирования при каноническом методе

Существенно, что установление инвариантности позволяет полностью исключить процесс аналитического интегрирования и свести задачу к исследованию характера возмущения самих дифференциальных уравнений.

Проведем сравнение результатов интегрирования, полученных каноническим методом и методом Эйлера.

В таблице 1 приведены значения исходных данных сравнительного анализа для случая свободного вращения твердого тела.

Таблица 1 – Исходные данные для случая свободного вращения твердого тела

Моменты инерции, $кг \cdot м^2$, $t = 0$			Моменты импульсов, $кг \cdot м^2 / с$, $t = 0$			Угловые координаты, градусы, $t = 0$		
J_1	J_2	J_3	p_φ	p_θ	p_ψ	φ	θ	ψ
10^4	10^4	10^4	1222	2000	3333	0	0	0

Результаты численного эксперимента приведены на рисунке 11.

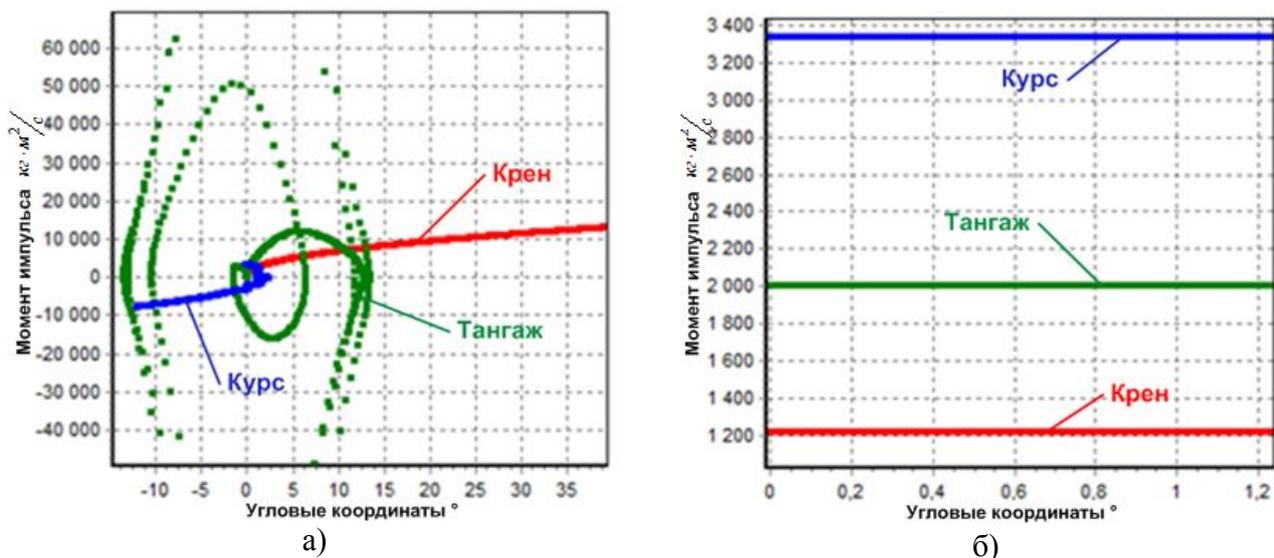


Рисунок 11 – Результаты численного эксперимента

а) фазовые траектории по методу Эйлера, б) фазовые траектории по каноническому методу, шаг интегрирования $\tau = 0.01$

Результаты проведенных экспериментов показывают, что при исследовании методом Эйлера движение является неустойчивым. При каноническом методе возникающие в процессе счета консервативные возмущения не нарушают исходную устойчивость движения.

В таблице 2 приведены значения исходных данных для сравнительного анализа движения твердого тела в потенциальном поле.

Таблица 2 - Исходные данные для случая движения в потенциальном поле

Моменты инерции, $кг \cdot м^2$, $t = 0$			Моменты импульсов, $кг \cdot м^2 / с$, $t = 0$			Угловые координаты, градусы, $t = 0$			Восстанавливающие моменты, $кг \cdot м^2 / с$, $t = 0$		
J_1	J_2	J_3	P_φ	P_θ	P_ψ	φ	θ	ψ	M_{Y1}	M_{Y2}	M_{Y3}
10^4	10^4	10^4	1222	2000	3333	0	0	0	10^7	$2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$

Результаты численного эксперимента приведены на рисунке 12.

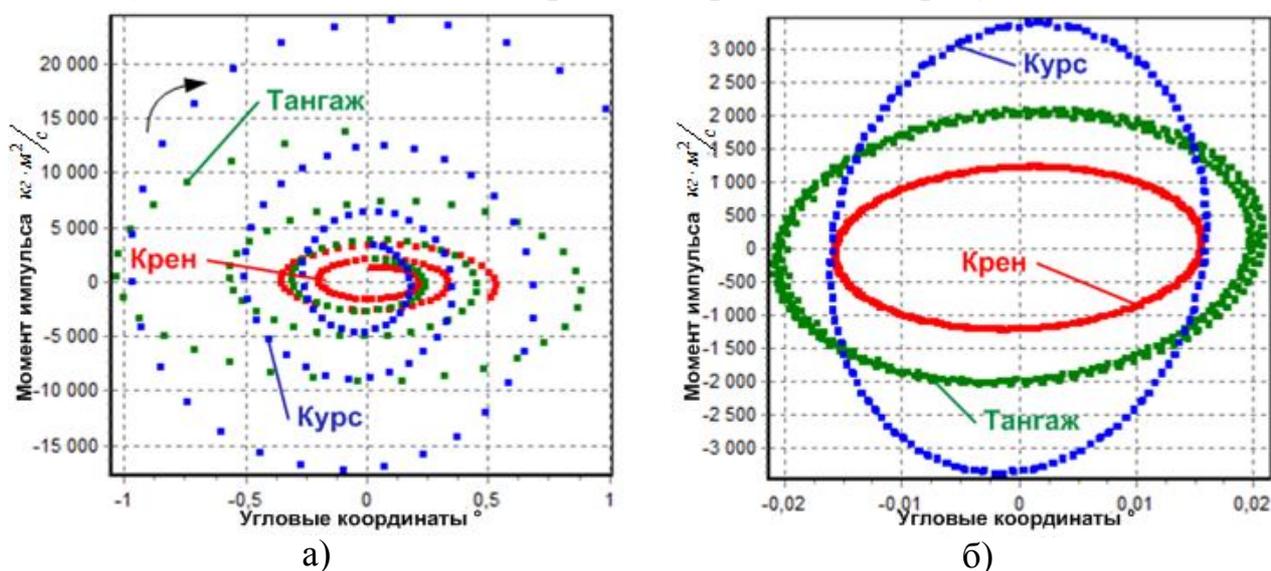


Рисунок 12 – Результаты численного эксперимента

а) фазовые траектории по методу Эйлера, б) фазовые траектории по каноническому методу, при шаге интегрирования $\tau = 0.01$

Стрелочками на рисунке 12а показано направление движения расходимости улитки Эйлера (неустойчивый фокус). При каноническом методе на рисунке 12б видно устойчивое колебательное движение.

Рассмотрим движения твердого тела в потенциальном поле под действием диссипативных сил, значения исходных данных приведены в таблице 3.

Таблица 3 - Исходные данные для случая движения в потенциальном поле под действием диссипативных сил

Моменты инерции, $кг \cdot м^2$, $t = 0$			Моменты импульсов, $кг \cdot м^2 / с$, $t = 0$			Угловые координаты, градусы, $t = 0$			Восстанавливающие моменты, $кг \cdot м^2 / с$, $t = 0$			Диссипативные моменты, $кг \cdot м^2 / с$, $t = 0$		
J_1	J_2	J_3	P_φ	P_θ	P_ψ	φ	θ	ψ	M_{Y1}	M_{Y2}	M_{Y3}	MQ_{Y1}	MQ_{Y2}	MQ_{Y3}
10^4	10^4	10^4	1222	2000	3333	0	0	0	10^7	$2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$	2	2	2

Результаты численного эксперимента приведены на рисунке 13.

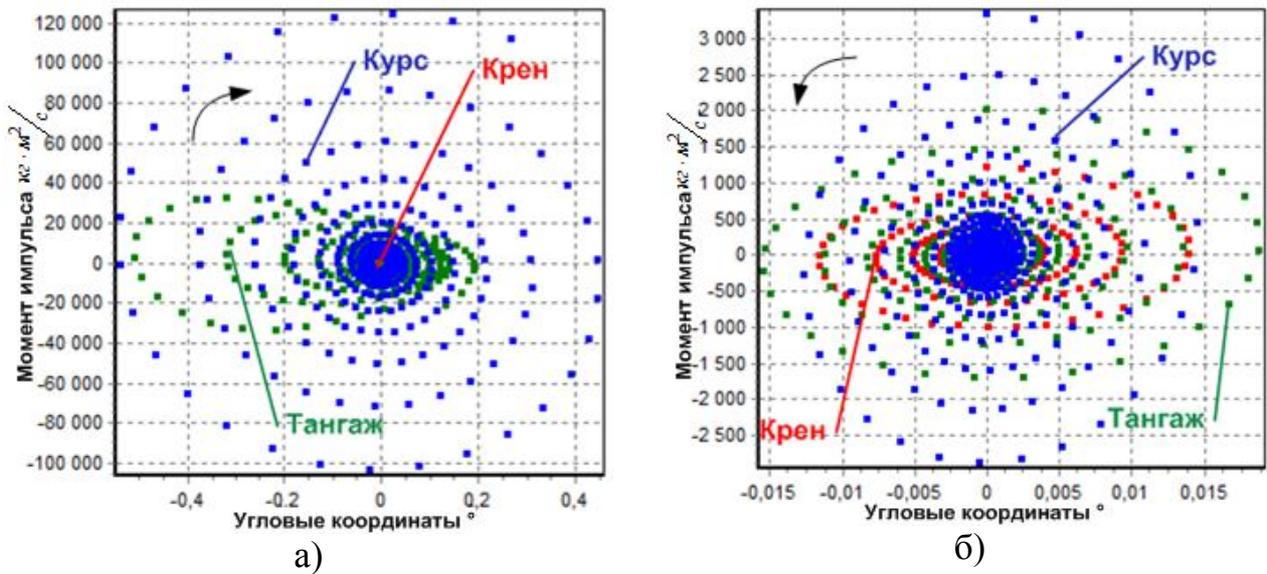


Рисунок 13 – Результаты численного эксперимента

а) фазовые траектории по методу Эйлера, б) фазовые траектории по каноническому методу, при шаге интегрирования $\tau = 0.01$

Результаты проведенных экспериментов показывают, что при исследовании методом Эйлера происходит расхожимость улитки Эйлера (рисунок 13а), т.е. фазовые траектории имеют неустойчивый фокус. При каноническом методе на рисунке 13б наблюдается асимптотическая устойчивость.

В четвертой главе описано построение программного комплекса моделирования и исследования динамической устойчивости летательного аппарата, который предназначен для проведения компьютерного эксперимента, в режиме реального времени и временного опережения.

Разработана методика организации этапов моделирования и исследования динамической устойчивости летательного аппарата (рисунок 14).

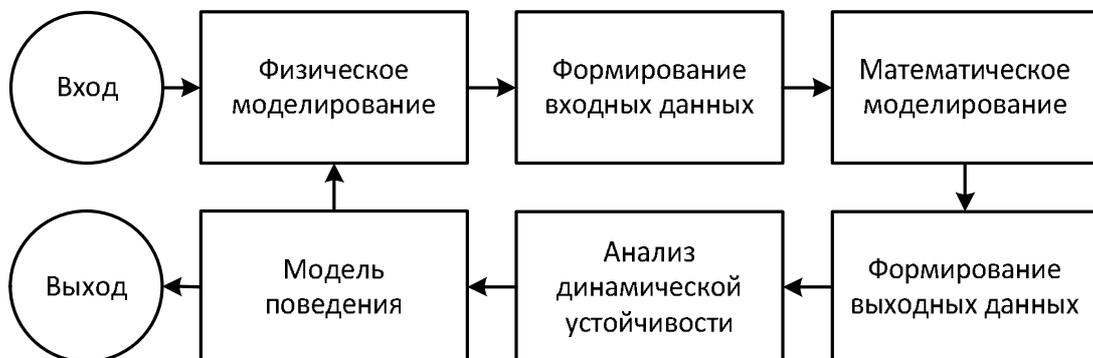


Рисунок 14 – Этапы моделирования и исследования динамической устойчивости летательного аппарата

На этапе физического моделирования описываются модели поведения летательного аппарата под действием внешних сил, выделяются параметры режимов и конструкции, которые являются входными параметрами программного комплекса: угловые координаты, определяющие конфигурационное пространство твердого тела, относительно неподвижной системы отсчета; производные по времени от угловых координат; главные моменты инерции.

Для свободного вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в качестве углов выбраны углы поворота относительно оси крена, тангажа и курса (φ, θ, ψ) (рисунок 1).

Совокупность учета сил тяжести, силы тяги двигателя и аэродинамических сил и их комбинаций дает многообразие физических моделей, и дополняют входные параметры.

Математической моделью, описывающей движение твердого тела применительно к описанию движения летательного аппарата, являются динамические уравнения Гамильтона.

В качестве выходных данных предусмотрена мультимедийная модель движения летательного аппарата, графическое и численное представление переменных параметров модели.

Анализ результатов заключается в качественной и количественной оценке параметров и сравнение их с экспериментальными данными.

В программном комплексе решаются следующие задачи: ввод исходных данных для моделирования системы; проверка правильности введенных данных; выбор модели движения или группы моделей; проведение компьютерного эксперимента на основе математической модели; отображение 3D-модели движения; построение проекций летательного аппарата; построение графиков; формирование отчета по проведенному исследованию; настройка внешнего вида оболочки и отдельных объектов (графиков, 3D-модели).

Программный комплекс имеет большой набор параметров, которые можно настраивать для удобства использования.

В качестве примера работы программного комплекса проведем численное исследование движения твердого тела в потенциальном поле. Динамические характеристики твердого тела (J_1, J_2, J_3) , начальные условия $(\varphi, \theta, \psi, p_\varphi, p_\theta, p_\psi)$ при $t=0$) и внешние воздействия (M_{Y1}, M_{Y2}, M_{Y3}) при шаге интегрирования $\tau = 0.01$ приведены в таблице 4.

Таблица 4 - Исходные данные для случая движения в потенциальном поле

Моменты инерции, $кг \cdot м^2, t = 0$			Моменты импульсов, $кг \cdot м^2 / с, t = 0$			Угловые координаты, градусы, $t = 0$			Восстанавливающие моменты, $кг \cdot м^2 / с, t = 0$		
J_1	J_2	J_3	p_φ	p_θ	p_ψ	φ	θ	ψ	M_{Y1}	M_{Y2}	M_{Y3}
10^4	10^4	10^4	1222	2000	3333	0	0	0	10^7	$2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$

На рисунке 15 показано окно с графическими результатами исследования.

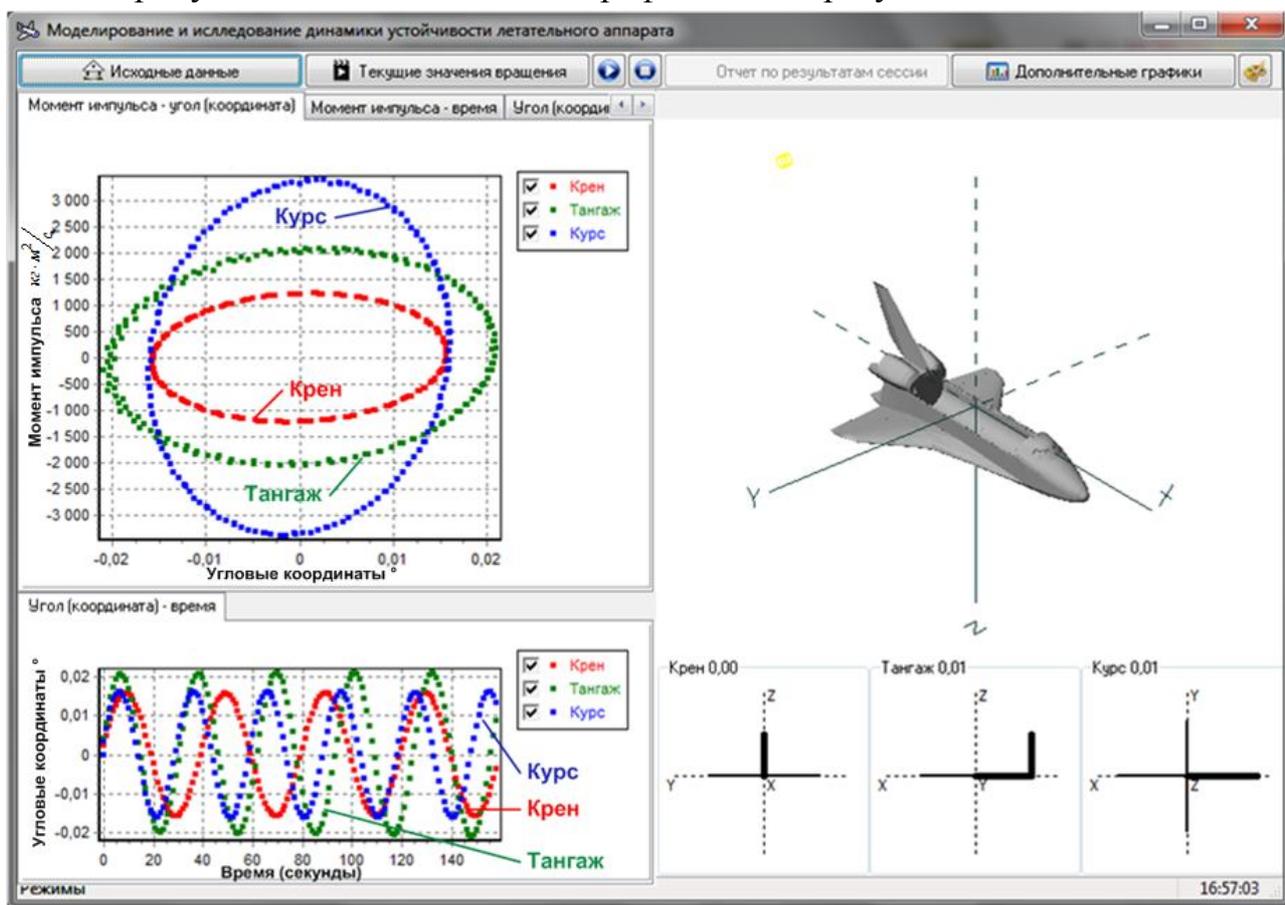


Рисунок 15 – Окно с графическими результатами исследования движения в потенциальном поле

Результат проведенного эксперимента показывает, что происходит устойчивое колебательное движение.

На программный комплекс “Моделирования и исследования динамической устойчивости летательных аппаратов” (МИДУЛА) получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010611155. Также на программный комплекс “Моделирование и оценка вертикальных виброн нагружений транспортного средства” получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615497.

Работа проводилась по заданию Федерального агентства по образованию в рамках Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” по теме 0120.0 805060 “Исследование динамической устойчивости летательных аппаратов (ЛА)” (2008 – 2009 гг.).

В настоящее время результаты работы используются в исследованиях в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 года (ГК № 02.740.11.0658 от 29 марта 2010 г) по теме “Разработка модели автоматизированной системы интеграции открытых виртуальных лабораторных комплексов”.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Математическая модель движения твердого тела, построенная на основе фундаментальных положений аналитической динамики, позволяет исследовать его поведения в условиях свободного вращения, в потенциальном поле и под действием диссипативных сил.
2. Доказано, что консервативные возмущения не нарушают устойчивость движения твердого тела.
3. Разработана методика построения алгоритмов интегрирования уравнений Гамильтона, устойчивых к накоплению погрешности во времени.
4. Построенные алгоритмы позволяют повысить точность решения и быстродействие, что подтверждается малой величиной относительной погрешности функции Гамильтона H ($\max \Delta H/H = 0,0002$) и наименьшим возможным числом используемых в алгоритмах арифметических операций.
5. Разработан программный комплекс моделирования и исследования динамической устойчивости летательного аппарата.
6. Программный комплекс использован для сравнительной характеристики устойчивости движения твердого тела с помощью алгоритмов интегрирования Эйлера и канонического метода интегрирования и для исследуемых режимов показал:
 - а) свободное вращение: неустойчивость по методу Эйлера и устойчивость по каноническому методу;
 - б) движение в потенциальном поле: неустойчивый фокус по методу Эйлера, устойчивый фокус по каноническому методу;
 - в) движение в потенциальном поле под действием диссипативных сил: неустойчивый фокус по методу Эйлера, асимптотическая устойчивость по каноническому методу.

НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Селиванов К.М., Ермолаева Е.В. Канонические преобразования фазового пространства в динамике твердого тела. // Вестник ИжГТУ. - 2009. – №4 – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2009 - С. 190–195.
2. Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Ермолаева Е.В., Селиванов К.М. Канонический метод в основе анализа устойчивости летательных аппаратов. // Сборник научных трудов. XII Международная научно – практическая конференция. ”Фундаментальные и прикладные проблемы приборостроения, информатики и экономики”. – Москва: Изд-во МГУПИ, 2009. – С.43–46.
3. Якимович Б.А., Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Ермолаева Е.В., Селиванов К.М. Программно – методический комплекс моделирования и исследования динамической устойчивости летательного аппарата. // Сборник научных трудов. XII Международная научно – практическая конференция. ”Фундаментальные и прикладные проблемы приборостроения, информатики и экономики”. - Москва: Изд-во МГУПИ, 2009. – С. 193–197.
4. Селиванов К.М. Канонический метод интегрирования в исследовании движения твердого тела. // Интеллектуальные системы в производстве. - 2010. – № 1 - Ижевск: Изд-во ИжГТУ - С. 67–76.
5. Селиванов К.М. Движение твердого тела под действием обобщенных сил. // Информационные системы и модели в научных исследованиях промышленности и экологии: Тез. докл. VI Всероссийская науч. – техн. конф. 2010 – Тула: Изд-во Инновационные технологии, 2010. – С. 10 – 15.
6. Селиванов К.М. Устойчивость движения твердого тела под действием малых консервативных возмущений. // Информационные системы и модели в научных исследованиях промышленности и экологии: Тез. докл. VI Всероссийская науч. – техн. конф. 2010 – Тула: Изд-во Инновационные технологии, 2010. – С. 22 – 26.
7. Свидетельство о официальной регистрации программы для ЭВМ «МИДУЛА» / Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Селиванов К.М., Ермолаева Е.В.– № 2010611155; Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 9.02.2010 г.
8. Исследование динамической устойчивости летательных аппаратов (ЛА): Отчет НИР (заключ.) / ИжГТУ; рук. Ефимов И.Н. 2009 – 134 с. – Исполн.: Морозов Е.А., Германюк Г.Ю., Селиванов К.М., [и др.]. - № государственной регистрации 01 200. 805060.
9. Свидетельство о официальной регистрации программы для ЭВМ «Моделирование и оценка вертикальных вибронагрузений транспортного средства» / Ефимов И.Н., Селиванов К.М., Гаас С.О., Кочеева И.Ф. – № 2010615497; Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 27.08.2010 г.

Диссертант



К.М. Селиванов

Подписано в печать 10.11.10г. Формат 60x84/16
Усл. печ. л 1,5. Тираж 100 экз. Заказ №1189

Отпечатано в ЧТИ ИжГТУ
617766, Пермский край, г. Чайковский, ул. Декабристов, 23